

ОПТИКА СФЕРИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ

Ерофеева Г.И., Петров К.А., Развина Т.И., Развин Ю.В.

В учебную программу по физике для 11 классов (повышенный уровень) в разделе «Оптика» включены темы уроков по ознакомлению и изучению действия сферических зеркал. Целью занятий является формирование у учащихся знаний по построению изображений в сферических зеркалах, усвоению формулы сферического зеркала и практических умений при решении задач по указанной теме.

Широкое практическое применение сферических зеркал в различных осветительных и измерительных оптических системах, лазерной техники, вычислительной оптики, приборах медтехники и др. определяет интерес учителей физики к данной теме.

Настоящая статья рекомендована учителям в качестве базового пособия по физике и для индивидуальной работы с учениками, а также будет полезна учащимся, желающим повысить уровень знаний и подготовиться к экзаменам по физике.

Следует отметить, что стимулом подготовки предлагаемых материалов, являются многочисленные пожелания учителей.

Сферическое зеркало представляет собой поверхность шарового сегмента, зеркально отражающую свет. В *вогнутом* зеркале, отражение света происходит от внутренней поверхности шарового сегмента. В *выпуклом* зеркале – от наружной поверхности.

При рассмотрении сферических зеркал (рис. 1) оперируем следующими понятиями:

- а) геометрический центр (точка O) сферы радиусом R , из которой вырезан шаровый сегмент, называется *оптическим центром* зеркала;
- б) вершина шарового сегмента (точка P) – *полюс* зеркала ($|OP| = |OK| = R$ – радиус кривизны сферического зеркала);
- в) прямая $|OP|$, проходящая через центр кривизны и полюс зеркала – *главная оптическая ось* зеркала;
- г) прямые, проходящие через центр кривизны и любую точку зеркала, т.е. совпадающие с радиусами кривизны зеркала – *побочные оптические оси* зеркала;
- д) световые лучи, идущие вблизи главной оптической оси, называются *параксиальными* или *центральными* (при построении изображений в сферических зеркалах используются только центральными лучами).

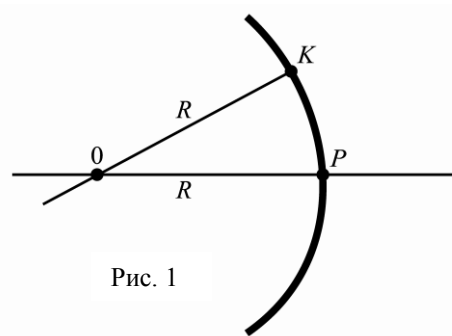


Рис. 1

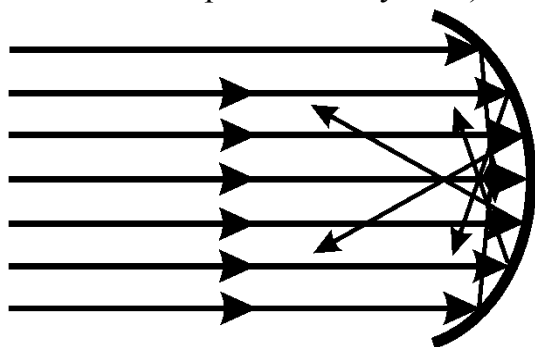


Рис. 2

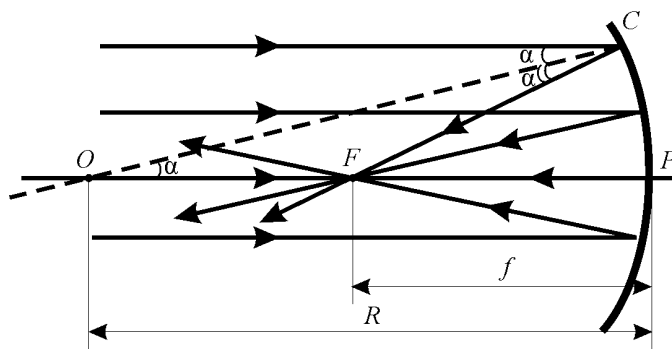


Рис. 3

Если рассматривать ход лучей, падающих на вогнутое зеркало параллельно его главной оптической оси и испытывающих отражение от его поверхности, можно заметить, что отраженные лучи не собираются в одной точке, следовательно сферическое зеркало не создает четкого изображения (рис. 2). Если размеры зеркала малы по сравнению с его радиусом кривизны, то все лучи, идущие параллельно главной оптической оси, будут отражаться от его поверхности под малыми углами и пересекаться в одной точке F , называемой *главным фокусом* зеркала (рис. 3).

Из рис. 4 видно, что у вогнутого зеркала главный фокус – *действительный*, т.к. в нем пересекаются сами отраженные от зеркала лучи (лучи 1 и 2). У выпуклого зеркала (рис. 5) – фокус *мнимый*, т.к. в нем пересекаются продолжения отраженных от зеркала лучей.

Расстояние от фокуса F до полюса P зеркала называется *главным фокусным расстоянием* зеркала ($|FP| = F$).

Плоскость, проходящая через главный фокус зеркала, перпендикулярная главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью* (MN на рисунках 4–5).

Лучи, параллельные побочной оптической оси, после отражения от зеркала проходят через точку F' пересечения фокальной плоскости этой осью (лучи 3 и 4 на рис. 4).

Любой луч, падающий на сферическое зеркало по одной из его оптических осей, отражается от зеркала по той же оси (луч 4 на рис. 4).

Фокусное расстояние сферического зеркала равно половине его радиуса кривизны: $F = R/2$. Главный фокус расположен на главной оптической оси перед вогнутым зеркалом (рис. 4), у выпуклого зеркала – за ним (рис. 5).

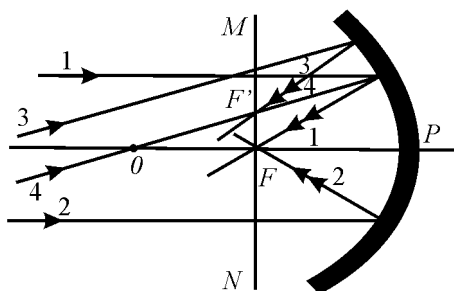


Рис. 4

Оптическая сила зеркала $D = 1/F = 2/R$, измеряется в диоптриях (1 дптр = 1/м).

У вогнутых зеркал $F > 0$ и $D > 0$, у выпуклых $F < 0$ и $D < 0$.

Формула сферического зеркала имеет вид: $1/d + 1/f = 1/F = 2/R$, где d – расстояние от предмета до

полюса зеркала, f – расстояние от полюса до изображения. Эта формула применима как для вогнутых, так и для выпуклых зеркал, если использовать правила знаков: все величины d, f, R и F – положительны, если эти расстояния отсчитываются от полюса зеркала в сторону предмета, и отрицательны – если отсчитываются от полюса за зеркало. Поэтому для действительных предметов и изображений d и f всегда положительны, на мнимый характер изображения указывает знак «минус» при f .

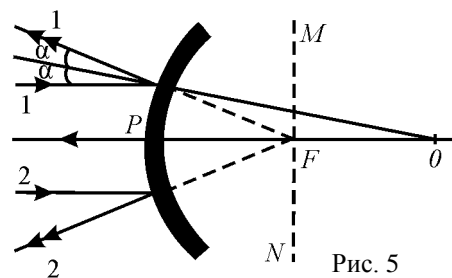


Рис. 5

Для вогнутого сферического зеркала формула имеет вид $1/d \pm 1/f = 1/F$.

Для выпуклого сферического зеркала (R и F – отрицательны) – $1/d - 1/f = -1/F$.

Если в задаче заранее неизвестно, является изображение или фокус действительным (мнимым), перед соответствующей величиной ставится знак «плюс».

Знак («плюс» или «минус») рассчитанной величины укажет на характер изображения и фокуса.

При решении ряда задач приходится иметь дело с *мнимым источником* и тогда величина d считается отрицательной ($d < 0$). За мнимый источник принимают точку, в которой сходятся продолжения лучей, падающих на зеркало сходящимся пучком.

При построении изображения предмета достаточно построить изображение его крайних точек. При построении изображения любой светящейся точки в сферическом зеркале используют пересечение каких-либо указанных ниже лучей,

отраженных от зеркала или их продолжений (рис.6):

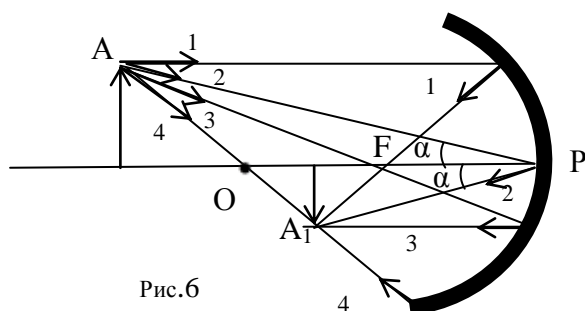


Рис.6

– луч 1, идущий параллельно главной оптической оси, после отражения от зеркала проходит через его главный фокус;

– луч 2, падающий на полюс P зеркала, отражается симметрично падающему лучу относительно главной оптической оси;

– луч 3, проходящий через главный фокус зеркала, после отражения идет параллельно главной оптической оси (свойство обратимости лучей, см. луч 1);

– луч 4, идущий вдоль любой оптической оси (главной или побочной) после отражения от зеркала возвращается вдоль этой же оси.

После построения изображения предмета в сферическом зеркале следует дать характеристику изображения: действительное или мнимое; увеличенное или уменьшенное; прямое или перевернутое, его положение.

Построим изображение предмета в вогнутом сферическом зеркале в зависимости от расстояния d предмета от зеркала.

а) предмет A расположен между зеркалом и его фокусом ($d < F$, рис. 7). Изображение A_1 предмета A – мнимое, прямое увеличенное, расположено за зеркалом. Увеличение $\Gamma = f/d > 1$. Формула зеркала: $1/d - 1/f = 1/F$.

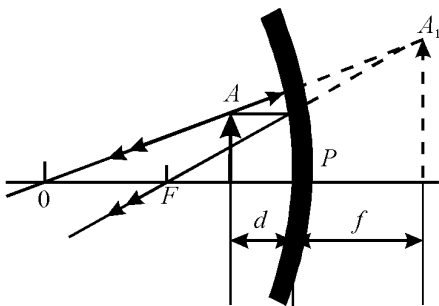


Рис. 7

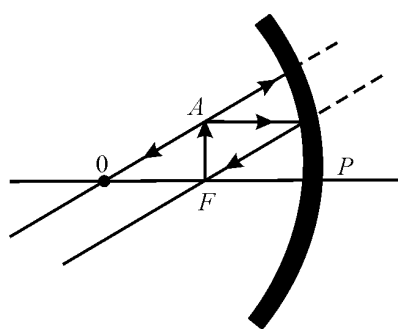


Рис. 8

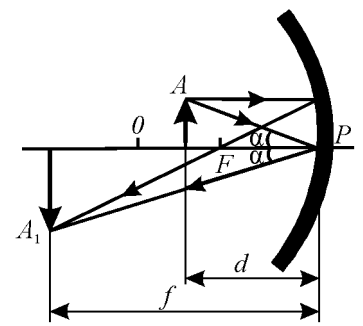


Рис. 9

б) предмет A расположен в фокусе зеркала ($d = F$, рис. 8). Изображение находится в бесконечности.

в) предмет A расположен между фокусом и оптическим центром (центром кривизны) зеркала ($F < d < 2F$, рис. 9).

Изображение A_1 – действительное, перевернутое, увеличенное, расположено за оптическим центром зеркала. Увеличение $\Gamma = f/d > 1$. Формула зеркала $1/d + 1/f = 1/F$.

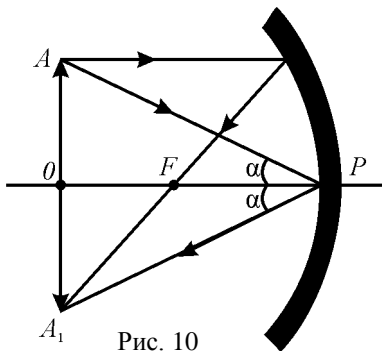


Рис. 10

г) предмет A расположен в оптическом центре зеркала ($d = 2F$, рис. 10). Изображение A_1 – действительное, перевернутое, в натуральную величину, расположено в оптическом центре ($f = d = 2F = R$). Увеличение $\Gamma = f/d = 1$. Формула зеркала $1/d + 1/f = 1/F$.

д) предмет A расположен за оптическим центром зеркала ($d > 2F$, рис. 6). Изображение – действительное, перевернутое, уменьшенное, расположено между оптическим центром и фокусом зеркала. Увеличение $\Gamma = f/d < 1$.

На рис. 11 представлены построения двух изображений A_1 и (A_1) предмета при двух его положениях A и (A) относительно выпуклого зеркала. Изображение, даваемое выпуклым

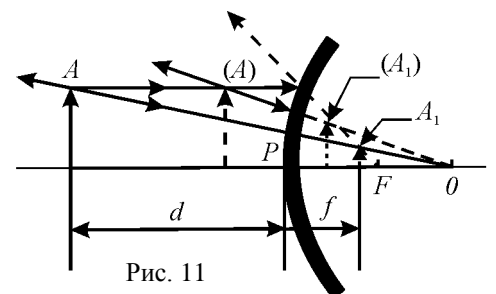
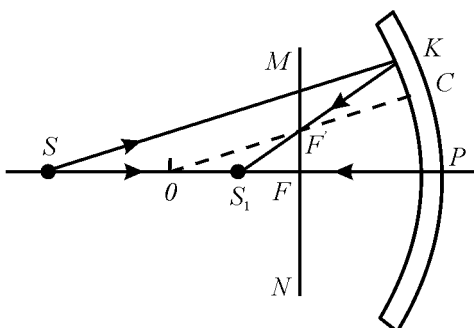


Рис. 11



сферическим зеркалом всегда мнимое, прямое, уменьшенное, расположено между полюсом зеркала и его мнимым фокусом ($f < d$, $\Gamma = f/d < 1$).

Для изображения светящейся точки, лежащей на главной оптической оси вогнутого зеркала, воспользуемся двумя лучами (рис. 12).

Луч SP идет вдоль главной оптической оси зеркала, отражается и идет по этой же оси (луч PS). Произвольный луч SK отражается в точке K . Ход отраженного луча определим с помощью фокальной плоскости MN и побочной оси OC , параллельной лучу SK . Ось OC пересекает фокальную плоскость в точке F' (побочный фокус), через которую должен пройти отраженный от зеркала в точке K луч SK . Продолжив KF' до пересечения с лучом PS , получим точку S_1 , которая и явится изображением светящейся точки S .

Рис. 12

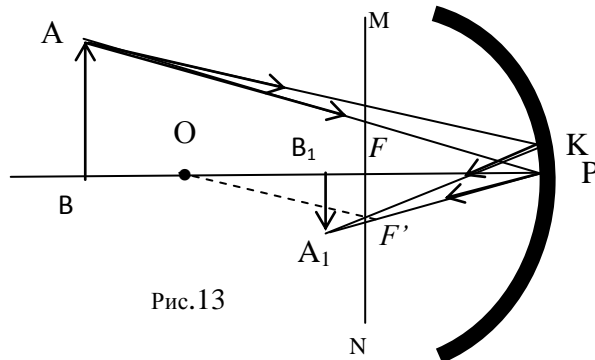


Рис.13

При получении изображения предмета AB , размер которого много больше размера вогнутого зеркала (рис. 13), воспользуемся двумя лучами: AP , падающим на полюс P зеркала и отражающимся от него под тем же углом, и произвольным лучом AK . Проведем фокальную плоскость MN и параллельно лучу AK побочную оптическую ось до пересечения с фокальной плоскостью в точке F' . Луч AK отражается и проходит через точку F' до пересечения в точке A_1 с отраженным в точке P лучом. Изображение A_1B_1

предмета AB перпендикулярно главной оптической оси зеркала как и предмет.

Рис. 13

Далее рассмотрим решения ряда задач по теме «Сферические зеркала».

Задача 1. Докажите, что для сферических зеркал произведение расстояний от главного фокуса до предмета (a) и от изображения до главного фокуса (b) равно квадрату фокусного расстояния.

Решение:

Рассмотрим все случаи построения изображений в сферических зеркалах.

а) Предмет располагается между фокусом и вогнутым зеркалом (см. рис. а). Изображение предмета мнимое, прямое, увеличенное. Расстояние от главного фокуса до предмета $a = F - d$, $d = F - a$ (1); расстояние от изображения до фокуса $b = F + f$, $f = b - F$ (2).

Формула вогнутого зеркала при получении мнимого изображения имеет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \text{ или } F = \frac{fd}{f-d}.$$

С учетом (1) и (2)

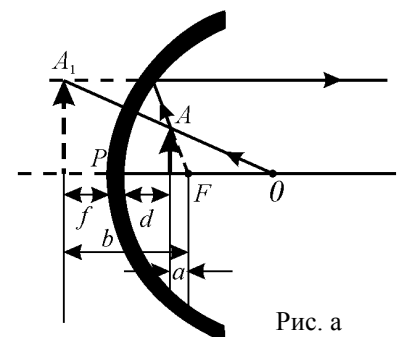


Рис. а

$$F = \frac{(F-a)(b-F)}{b-2F+a} \Rightarrow F^2 = ab.$$

б) Предмет располагается между главным фокусом и центром кривизны зеркала (см. рис. б).

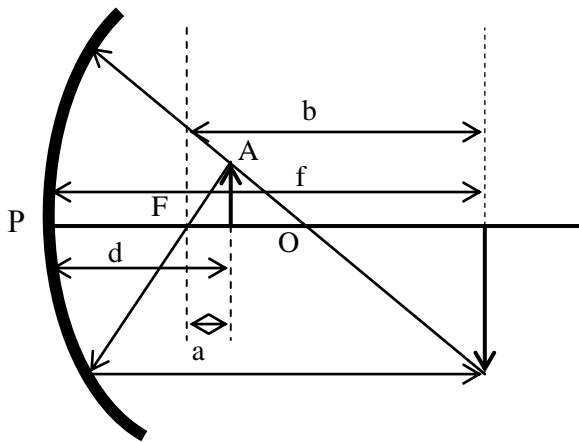


Рис.б

Изображение предмета действительное, перевернутое, увеличенное. Расстояние от полюса зеркала до предмета $d = F + a$, расстояние от полюса зеркала до изображения предмета $f = b + F$. Формула зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F+a} + \frac{1}{F+b}$ преобразуется к виду

$$F = \frac{(F+a)(F+b)}{2F+a+b}. \text{ Отсюда } F^2 = ab.$$

в) Предмет располагается в центре кривизны зеркала (см. рис. в). Изображение предмета действительное, перевернутое, в натуральную величину. При этом $a = b = F$, $d = f = 2F$. Очевидно, что $F^2 = ab$.

г) Предмет располагается за центром кривизны зеркала (см. рис. г). Изображение предмета в данном случае действительное, перевернутое, уменьшенное. Расстояние от предмета до зеркала $d = F + a$, расстояние от изображения до зеркала $f = F + b$. Из формулы зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{F+a} + \frac{1}{F+b}$ получим

$$F = \frac{(F+a)(F+b)}{2F+a+b}. \text{ Из этого выражения}$$

$$F^2 = ab.$$

д) В случае расположения предмета перед выпуклым зеркалом (рис. д) получаемое изображение всегда мнимое, прямое, уменьшенное. Формула зеркала имеет вид $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \Rightarrow F = \frac{f-d}{d-f}$.

Расстояние от предмета до зеркала $d = a - F$ и от зеркала до изображения $f = F - b$.

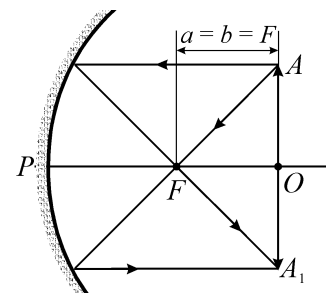


Рис. в

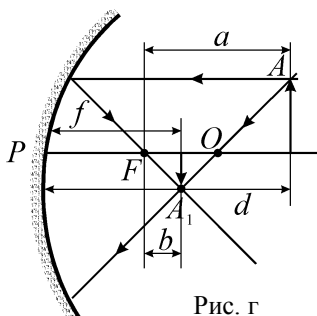


Рис. г

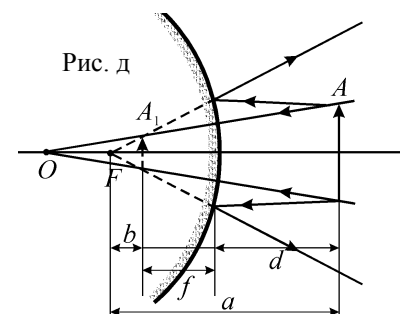


Рис. д

Тогда
$$F = \frac{(a-F)(F-b)}{a+b-2F} \Rightarrow F^2 = ab.$$

Для любого сферического зеркала его фокусное расстояние равно корню квадратному из произведения расстояний от предмета и от изображения до главного фокуса: $F = \sqrt{ab}$, – впервые выведено Ньютоном.

Задача 2. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета AB (см. рис.). Определите построением положение и фокус зеркала. Вогнутое или выпуклое это зеркало?

Решение:

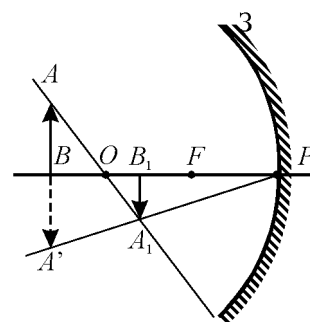
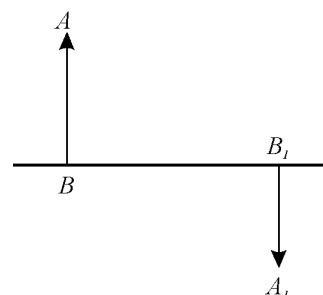
Как видно из рисунка изображение A_1B_1 предмета AB – перевернутое, действительное. Следовательно, зеркало, в котором изображение получено – вогнутое. Построением хода лучей получим положение зеркала.

а) через точки A и A_1 , B и B_1 (см. рис.) проводим прямые, которые будут перпендикулярны поверхности зеркала, а точка их пересечения O явится центром кривизны сферического зеркала;

б) симметрично точке A относительно оси BB_1 восстановим точку A' . Проведем прямую $A'A$, до пересечения с прямой BB_1 . Точка пересечения P явится полюсом вогнутого сферического зеркала;

в) часть сферической поверхности радиусом OP явится вогнутым зеркалом $З$;

г) разделив отрезок OP пополам, определим положение фокуса F вогнутого зеркала.



Задача 3. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета AB (см. рис.). Определите построением положение зеркала и его фокус.

Решение:

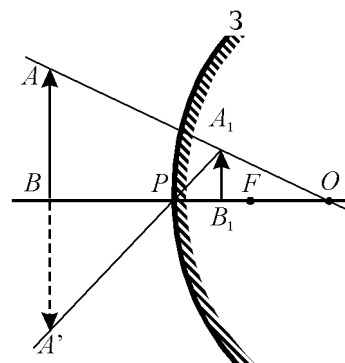
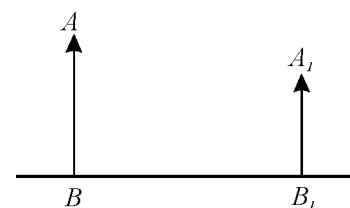
Положение зеркала определим с помощью построения хода лучей (см. рис.).

а) проводим через точки A и A_1 , B и B_1 (см. рис.) прямые, которые будут перпендикулярны поверхности зеркала, а точка их пересечения O явится центром кривизны сферического зеркала;

б) симметрично точке A относительно оси BB_1 восстановим точку A' . Проведем прямую $A'A$ до пересечения с прямой BB_1 . Точка пересечения P явится полюсом сферического зеркала;

в) часть сферической поверхности радиусом $|OP|$ явится выпуклым зеркалом $З$;

г) разделив отрезок $|OP|$ пополам, определим положение фокуса F выпуклого зеркала.



Изображение A_1B_1 , даваемое выпуклым зеркалом, – мнимое, прямое, уменьшенное.

Задача 4. Вертикальный стержень высотой $h = 5$ см расположен на расстоянии $d = 30$ см перед вогнутым сферическим зеркалом с радиусом кривизны $R = 40$ см. Определите положение и вид изображения, а также его высоту.

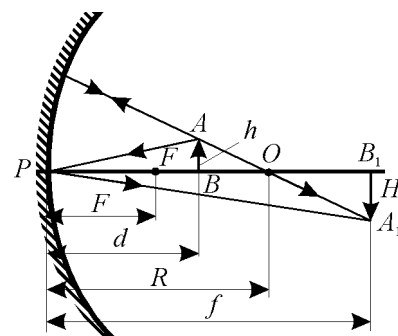
Решение:

Фокусное расстояние зеркала $F = R/2 = 20$ см.

Стержень оказывается расположенным между центром кривизны O зеркала и его фокусом F , следовательно изображение стержня будет действительным. Воспользу-

емся формулой вогнутого зеркала $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и определим

положение изображения стержня $f = Fd/(d - F) = 60$ см.



Руководствуясь правилами построения изображений в сферических зеркалах, построим изображение стержня в данном зеркале.

Как видно из построения, изображение стержня действительное, перевернутое, увеличенное. Линейное увеличение $\Gamma = H/h = f/d = 2$.

Высота изображения $H = 2h = 10$ см.

Задача 5. Вертикальный стержень высотой $h = 5$ см расположен на расстоянии $d = 60$ см от полюса выпуклого зеркала с радиусом кривизны $R = 40$ см. Определите положение и вид изображения, а также его высоту.

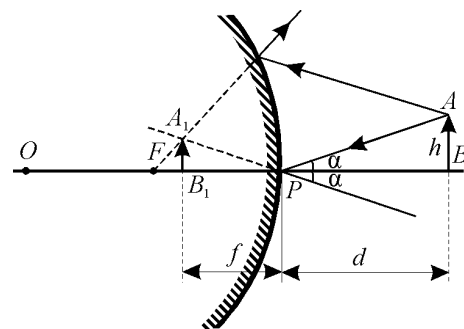
Решение:

Выпуклое сферическое зеркало позволяет получать мнимое, прямое изображение ($F < 0, f < 0$). Фокусное расстояние данного зеркала $F = -R/2 = -20$ см.

Из формулы $\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = -\frac{1}{|F|}$ определим расстояние

от полюса зеркала до мнимого изображения стержня $|f| = |F|d/(H + d) = 15$ см ($f = -15$ см).

Увеличение, даваемое зеркалом, $F = H/h = |f/d| = 1/4$. Следовательно, высота получаемого изображения $H = \Gamma h = 1,25$ см.



Задача 6. Предмет расположен перед вогнутым сферическим зеркалом перпендикулярно его главной оптической оси так, что отношение линейных размеров действительного изображения предмета оказалось $\Gamma_1 = 2,0$ см. После того как предмет отодвинули на $l = 15$ см от зеркала, отношение размеров действительного изображения и предмета стало $\Gamma_2 = 0,5$ см. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение:

Из правил построения изображений известно: если предмет располагается между фокусом F и центром кривизны O вогнутого сферического зеркала, получаемое изображение будет действительным, перевернутым, увеличенным.

Так как линейное увеличение в первом случае $\Gamma_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1} = 2,0$; $f_1 = \Gamma_1 d_1$, во втором случае $\Gamma_2 = \frac{H_2}{h} = \frac{f_2}{d_2} = \frac{f_2}{d_1+l} = 0,5$; $f_2 = \Gamma_2(d_1+l)$.

Воспользуемся формулой зеркала для этих двух случаев:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{\Gamma_1 d_1} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R} \quad (1);$$

$$\frac{1}{d_1+l} + \frac{1}{\Gamma_2(d_1+l)} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R} \quad (2).$$

Приравняем левые части уравнений (1) и (2): $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{\Gamma_1 d_1} = \frac{1}{d_1+l} + \frac{1}{\Gamma_2(d_1+l)}$.

Решим это уравнение и определим расстояние d_1 от зеркала до предмета:

$$d_1 = l \frac{\Gamma_2(\Gamma_1+1)}{\Gamma_1-\Gamma_2} = 15 \text{ см} \quad (3).$$

Из уравнения (1) с учетом (3) определим радиус кривизны вогнутого сферического зеркала $R = 2l \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 20 \text{ см}$.

Задача 7. Линейное увеличение изображения предмета, даваемое выпуклым сферическим зеркалом, $\Gamma_1 = 0,25$. Если зеркало передвинуть на расстояние $l = 0,2 \text{ м}$ вдоль его главной оптической оси, то линейное увеличение станет равным $\Gamma_2 = 0,2$. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение:

Из правил построения изображений в выпуклом зеркале можно сразу сделать вывод: изображение предмета уменьшается, следовательно, зеркало удаляется от предмета.

Если $\Gamma_1 = H_1/h = f_1/d_1$ (1), (h и H_1 – линейные размеры предмета и его изображения; d_1 и f_1 – расстояния от предмета до зеркала и от зеркала до изображения, соответственно).

Передвинув зеркало от предмета получаем $\Gamma_2 = H_2/h = f_2/d_2 = f_2/(d_1+l)$ (2), (H_2 – линейный размер нового изображения предмета, f_2 и $d_2 = d_1+l$ – новые расстояния от зеркала до изображения и от предмета до зеркала, соответственно).

Воспользуемся формулой выпуклого зеркала для этих двух случаев с учетом (1) и (2):

$$-\frac{1}{F} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{\Gamma_1 f_1} = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 d_1} \quad (3);$$

$$-\frac{1}{F} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{d_1+l} - \frac{1}{\Gamma_2(d_1+l)} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2(d_1+l)} \quad (4).$$

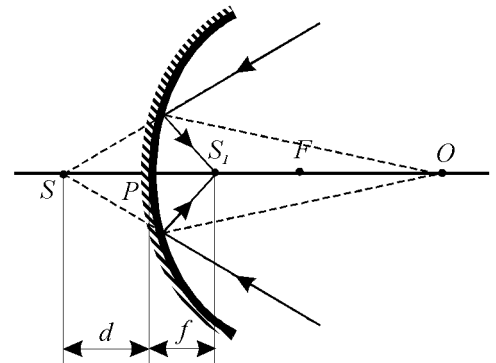
Приравняв правые части выражений (3) и (4) получим: $\frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 d_1} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2(d_1+l)}$, опреде-

лим $d_1 = \frac{\Gamma_2(\Gamma_1 - 1)}{\Gamma_2 - \Gamma_1} \cdot l = 60 \text{ см} \quad (5)$.

Из выражения (3) определим радиус кривизны выпуклого сферического зеркала:

$$R = \frac{2\Gamma_1 d_1}{1 - \Gamma_1} = \frac{2\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \cdot l = 40 \text{ см.}$$

Задача 8. На вогнутое сферическое зеркало падают сходящиеся лучи так, что их продолжения пересекаются на главной оптической оси зеркала на расстоянии $d = 10$ см за зеркалом. Определите радиус кривизны R зеркала, если отраженные от зеркала лучи пересекаются в точке, расположенной на расстоянии, равном $0,2$ фокусного расстояния зеркала ($f = 0,2F$).



Решение:

Точку S , в которой сходятся продолжения падающих на зеркало сходящихся лучей, можно рассматривать как мнимый источник света. Формула вогнутого зеркала для данного случая имеет вид $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$.

С учетом условия задачи $\frac{1}{F} = \frac{1}{0,2F} - \frac{1}{d}$. Отсюда $F = 4d = 40$ см.

Тогда радиус кривизны зеркала $R = 2F = 80$ см.

Задача 9. Сходящийся пучок лучей падает на выпуклое сферическое зеркало так, что их продолжения пересекаются на главной оптической оси зеркала на расстоянии $d = 20$ см от полюса за зеркалом. Отраженные лучи собираются на оптической оси зеркала на расстоянии $f = 30$ см от полюса. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение:

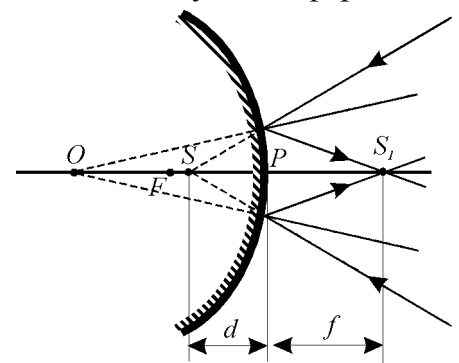
Точку S , в которой собираются продолжения падающих на выпуклое сферическое зеркало сходящихся лучей, можно считать мнимым источником света.

Точка S_1 пересечения отраженных от зеркала лучей является действительным изображением мнимого источника света S .

Формула выпуклого зеркала в данном случае будет иметь вид

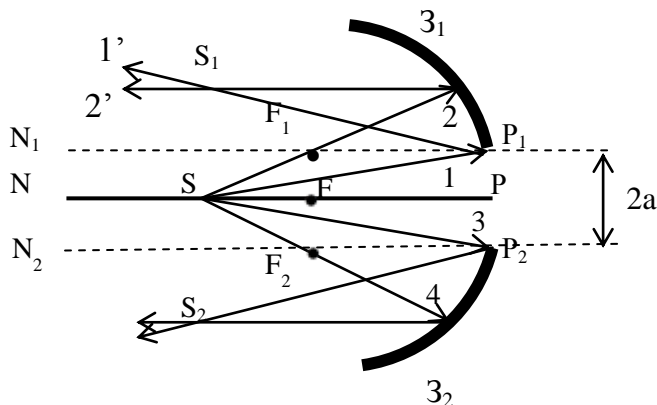
$$-\frac{1}{F} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Отсюда радиус кривизны зеркала $R = 2df / (f - d) = 1,2$ м.



Задача 10. Вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F = 20$ см разрезано пополам. Половинки раздвинуты на расстояние $a = 20$ мм симметрично главной оптической оси зеркала. Определите положения изображений точечного источника света S , помещенного на главной оптической оси зеркала на расстоянии $d = 40$ см от него.

Решение:



Построим изображения источника света S в двух полученных зеркалах Z_1 и Z_2 , являющихся половинками зеркала, полюс которого находится в точке P . Проведем параллельно главной оптической оси NP новые оптические оси N_1P_1 и N_2P_2 для зеркал Z_1 и Z_2 соответственно. Построим изображение светящейся точки S в зеркале Z_1 . Для этого проведем из этой точки в точку P_1 луч 1 и отраженный луч 1'. Нормалью в точку P_1 является новая оптическая ось N_1P_1 , при этом угол падения равен углу отражения. Луч 2, проведенный через новое положение фокуса F_1 , отразившись от зеркала, пройдет параллельно главной оптической оси (луч 2'). На пересечении отраженных лучей 1' и 2' получится изображение S_1 точечного источника света S . Аналогично построим изображение S_2 точки S с помощью лучей 3 и 4 для зеркала Z_2 (второй половинки).

Из формулы вогнутого зеркала $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ следует, что расстояние от зеркала до одного из изображений $f = \frac{F \cdot d}{d - F} = 0,4$ м. Таким образом, оба изображения точки получились на расстоянии $f = 2F$ от зеркала.

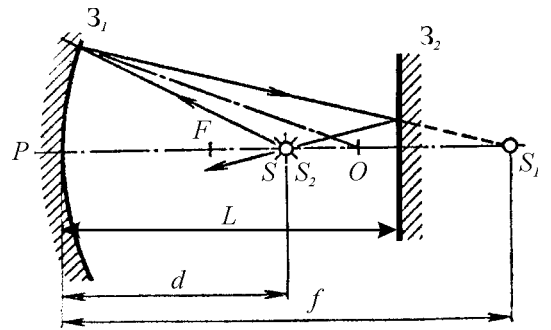
Для определения расстояния между изображениями S_1 и S_2 воспользуемся условием, что оптическая ось N_1P_1 является нормалью в точку падения луча 1 и делит угол SP_1S_1 пополам. Расстояние между изображениями и светящейся точкой $|SS_1| = 2a = 0,04$ м, расстояние между изображениями точки $|S_1S_2| = 4a = 0,08$ м.

Задача 11. На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала, радиус кривизны которого $R = 60$ см, на расстоянии $d = 40$ см от полюса расположен точечный источник света. Определите расстояние L от вогнутого зеркала, на котором следует расположить плоское зеркало, чтобы отраженный от него световой пучок вернулся в точку, где находится источник света.

Решение:

Согласно условию задачи светящаяся точка S расположена между фокусом $F = R/2 = 30$ см и центром кривизны O вогнутого зеркала Z_1 . Следовательно, ее изображение S_1 будет расположено на расстоянии f от вогнутого зеркала, которое определяется из формулы вогнутого зеркала $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$, $f = \frac{F \cdot d}{d - F} = \frac{30 \cdot 40}{40 - 30} = 120$ см.

Изображение S_1 получается в точке действительного пересечения лучей, отраженных от вогнутого зеркала, как показано на рисунке. Если на пути этих сходящихся лучей поставить плоское зеркало Z_2 , то после отражения их от него, они также будут сходящимися и дадут на своем пересечении изображение S_2 .



Используя принцип обратимости лучей, точку S_1 можно рассматривать как мнимый предмет для плоского зеркала, ее изображение S_2 в этом случае будет действительным и расположенным относительно плоскости зеркала Z_2 симметрично S_1 . Чтобы выполнялось условие задачи: изображение S_2 должно совпадать с источником S , зеркало Z_2 следует поставить посередине между светящейся точкой S и ее промежуточным изображением S_1 . Расстояние L от полюса P вогнутого зеркала до положения плоского зеркала определится по формуле $L = \frac{d + f}{2} = 80$ см.

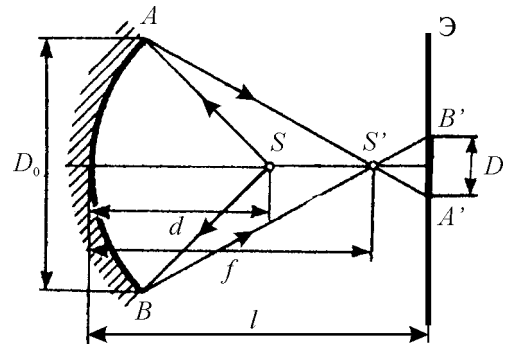
Задача 12. В прожекторе в качестве отражателя используется вогнутое сферическое зеркало диаметром $D_0 = 20$ см с фокусным расстоянием $F = 1$ м. Определите расстояние d от зеркала до точечного источника, расположенного на его главной оптической оси, чтобы лучи, отраженные от зеркала, давали на экране светлое пятно диаметром $D = 4$ см. Расстояние от зеркала до экрана $l = 12$ м.

Решение:

В зависимости от положения экрана относительно получаемого изображения точечного источника света данная задача имеет два решения.

Случай 1. Световое пятно диаметром D образуется на экране \mathcal{E} , установленном за изображением S' точечного источника света S , как показано на рисунке. Из подобия $\triangle AS'B$ и $\triangle A'S'B'$ $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|f|}{|l-f|}$ или

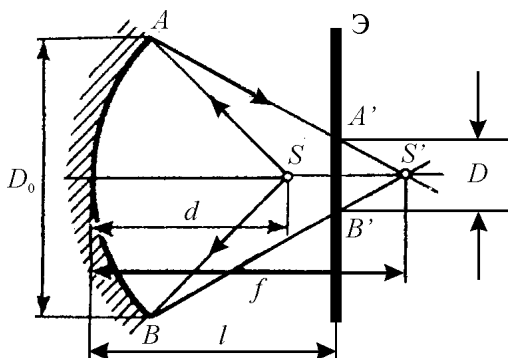
$$\frac{D_0}{D} = \frac{f}{l-f}. \text{ Отсюда } f = \frac{D_0 l}{D + D_0} \quad (1).$$



Для определения положения точечного источника S на главной оптической оси зеркала воспользуемся формулой зеркала $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ и получим расстояние от зеркала до источника света $d = Ff / (f - F)$ (2). Подставим (1) в (2)

$$d = FD_0 l / (D_0 l - F(D + D_0)) = 1,11 \text{ м.}$$

Случай 2. Световое пятно диаметром D образуется на экране \mathcal{E} , установленном перед получаемым изображением S' точечного источника света S , как показано на рисунке. Из подобных треугольников $\triangle ASB$ и $\triangle A'SB'$

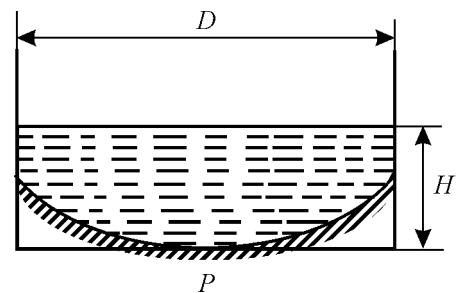


имеем $\frac{D_0}{D} = \frac{f}{f-l}$. Отсюда расстояние от зеркала до изображения S' равно $f = \frac{D_0 l}{D_0 - D}$ (1).

Из формулы вогнутого сферического зеркала расстояние d от зеркала до положения точечного источника света S на оптической оси с учетом (1) равно

$$d = FD_0l / (D_0l - F(D_0 - D)) = 1,07 \text{ м.}$$

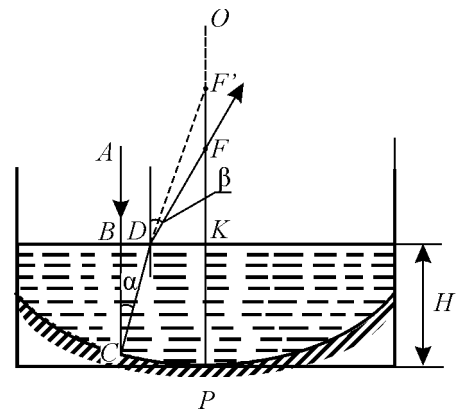
Задача 13. Цилиндрический сосуд диаметром $D = 5$ см содержит столб воды высотой $H = 20$ см. Дно сосуда представляет собой вогнутое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 80$ см (см. рис.). Определите положение фокуса данной оптической системы. Показатель преломления воды $n = 4/3$.



Решение:

В случае отсутствия воды в сосуде фокус зеркала находился бы в точке F' и фокусное расстояние сферического зеркала равнялось бы отрезку $|PF'| = R/2$.

Для определения фокусного расстояния оптической системы «зеркало – вода – воздух» рассмотрим (см. рис.) ход одного луча AB , падающего нормально на границу «воздух – вода» параллельно оси сосуда, совпадающей с главной оптической осью зеркала. Этот луч, не меняя своего направления, проходит слой воды и отражается в точке C от дна, изготовленного в виде вогнутого сферического зеркала (угол BDC – мал). Далее луч CD выходит из воды в воздух, преломляясь под углом β , пересекает ось в точке F . В этой точке будут собираться все параллельно падающие на зеркало лучи после отражения от него.



Фокусное расстояние системы $|PF| = |PK| + |KF|$, ($|PK| = H$). $|KF|$ определим, рассмотрев $\triangle F'DK$ и $\triangle FDK$. Сторона $|DK|$ – общая, равная $|F'K| \operatorname{tg} \alpha = |FK| \operatorname{tg} \beta$. Отсюда $|FK| = |F'K| \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta$. Из рисунка видно $|F'K| = R/2 - H$. В виду малости углов α и β , считаем соотношение $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = 1/n$. Тогда $|FK| = (R/2 - H)/n = (R - 2H)/2n$.

Фокусное расстояние системы $F = H + (R - 2H)/2n = 35$ см.

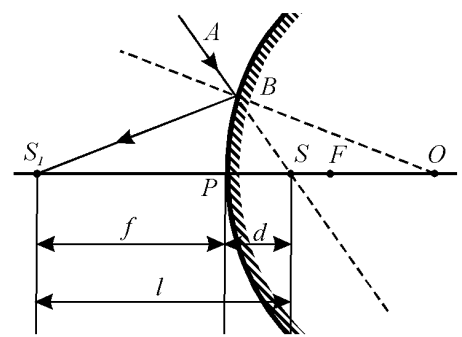
Задача 14. Луч света пересекает главную оптическую ось выпуклого сферического зеркала в некоторой точке S (см. рис.). Определите расстояние от точки S до полюса зеркала P , если луч, отраженный от зеркала, пересекает главную оптическую ось в точке S_1 , отстоящей от точки S на расстоянии $l = 1,5F$.

Решение:

Продолжим ход луча AB до пересечения с главной оптической осью выпуклого сферического зеркала. Точку пересечения S принимаем за мнимый источник света. Точку S_1 пересечения отраженного луча BS_1 с осью зеркала – за действительное изображение источника S .

Воспользуемся формулой зеркала $-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$.

Преобразуем ее к виду $Ff - Fd = df$. С учетом усло-



вия задачи ($d + f = l$) запишем $F(l - d) - Fd = d(l - d)$.

Получим квадратное уравнение вида $d^2 - (2F + l)d - Fl = 0$.

Решением этого квадратного уравнения будет:

$$d_{1,2} = F + \frac{l}{2} \pm \sqrt{F^2 + \frac{l^2}{4}} = 1,75F \pm 1,25F.$$

Т.к. расстояние d не может быть равным $3F$, то действительным может быть корень уравнения $d = 0,5F$.

Задача 15. Два одинаковых вогнутых сферических зеркала с радиусом кривизны $R = 80$ см установлены друг против друга на общей оптической оси так, что их фокусы совпадают (см. рис.). Определите положение изображения точечного источника света, полученного после отражения света от обоих зеркал, если источник расположен на расстоянии $d_1 = 50$ см от первого зеркала.

Решение:

При построении изображений предметов (источников света) в сложных оптических системах, состоящих из множества элементов, отражающих или пропускающих световые потоки, следует помнить: изображение, даваемое одним оптическим элементом системы, явится предметом к последующему элементу и т.д.

В данной задаче следует получить изображение S_1 источника света S , даваемое зеркалом Z_1 , затем, считая это изображение источником S_1 , получить его изображение S_2 в зеркале Z_2 .

Фокусы зеркал совпадают и фокусные расстояния равны $R/2 = 40$ см. Источник S расположен на главной оптической оси между фокусом F и центром кривизны O_1 (рис. а).

Положение его действительного изображения

S_1 определим из формулы зеркала $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$.

Расстояние $f_1 = \frac{Rd_1}{2d_1 - R} = 200$ см.

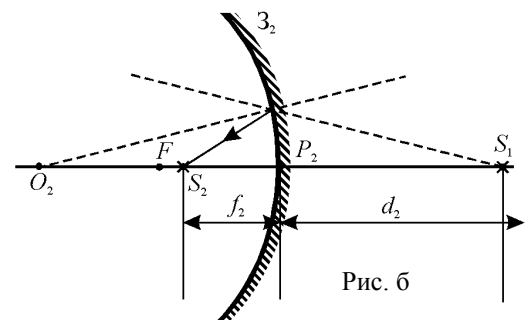
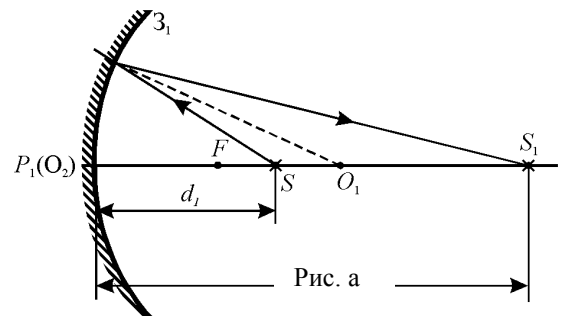
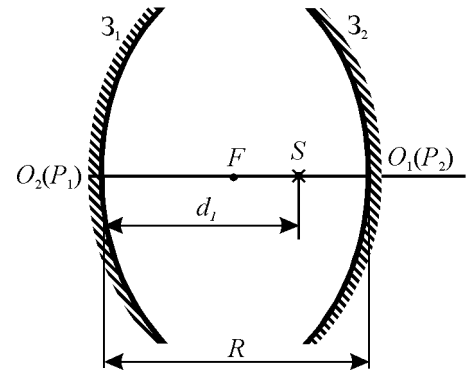
Изображение S_1 получено за зеркалом Z_2 на расстоянии d_2 от его полюса P_2 , равном $d_2 = f_1 - R = 120$ см (рис. б). Запишем формулу зеркала с учетом, что S_1 является мнимым источником света по отношению к зеркалу Z_2 :

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R}.$$

Отсюда определим положение изображения S_2 :

$$f_2 = \frac{Rd_2}{2d_2 + R} = 30 \text{ см.}$$

Изображение источника света S , полученное в системе двух вогнутых зеркал находится на расстоянии 30 см от второго зеркала.



Задача 16. Два сферических зеркала: вогнутое с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и выпуклое с фокусным расстоянием $F_2 = 25$ см, – расположены так, что их главные оптические оси совпадают, при этом выпуклое зеркало установлено в центре кривизны вогнутого зеркала. Между фокусом и центром кривизны вогнутого зеркала на расстоянии $d_1 = 28$ см от него перпендикулярно главной оптической оси расположен предмет высотой $h = 2$ см. Определите величину и положение изображения предмета в выпуклом зеркале, образуемого лучами, отраженными от вогнутого зеркала.

Решение:

Из условия задачи видно, что предмет A расположен между фокусом F_1 и центром кривизны O_1 вогнутого зеркала. Тогда его действительное, увеличенное изображение A_1 располагается на расстоянии f_1 от вогнутого зеркала Z_1 , которое определяется из формулы зеркала и будет равно $f_1 = F_1 d_1 / (d_1 - F_1) = 70$ см.

Увеличение, даваемое зеркалом Z_1

$$\Gamma_1 = H_1/h = f_1/d_1 = F_1/(d_1 - F_1) = 2,5.$$

Из построения изображения (см. рис.) очевидно, что изображение A_1 предмета A находится за выпуклым зеркалом Z_2 на расстоянии $d_2 = f_1 - R = f_1 - 2F_1 = 30$ см от его полюса P_2 , совпадающего с центром кривизны O_1 зеркала Z_1 ($R = 2F_1$).

Лучи, отраженные от вогнутого зеркала Z_1 , попадают на выпуклое зеркало Z_2 сходящимся пучком, следовательно изображение A_1 будет мнимым предметом для зеркала Z_2 . С учетом этого формула зеркала Z_2 будет иметь вид

$$-\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_2}. \text{ Отсюда } f_2 = \frac{d_2 \cdot F_2}{d_2 - F_2} = 150 \text{ см.}$$

Увеличение, даваемое этим зеркалом $\Gamma_1 = H_2/H_1 = f_2/d_2 = F_2/(d_2 - F_2) = 5$.

Таким образом, изображение A_2 предмета A в оптической системе, состоящей из двух зеркал (вогнутого и выпуклого), будет находится на расстоянии $f_2 = 150$ см от поверхности вы-

пуклого зеркала и иметь высоту $H_2 = \Gamma_1 \Gamma_2 h = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \cdot \frac{F_2}{d_2 - F_2} \cdot h = 25$ см.

